

1/3/2017

➔ Αξιωματική Θεμελίωση

Ένα σύστημα αξιωμάτων είναι δέκτο αν:

- (i) Είναι συνεκτικό (π.α για πρόταση να αποδεικνύεται είτε η κατάφαση είτε η άρνησή της)
- (ii) Ανεξάρτητο (να μην υπάρχει αξίωμα συνεπές των άλλων)
- (iii) Πλήρες

➔ Αξιώματα Ευκλείδη

- (1) Από κάθε σημείο και προς κάθε άλλο αχεται μοναδική ευθεία
- (2) Κάθε ευθεία προεκτείνεται επ' άπειρον
- (3) Με τυχαίο σημείο και τυχαία ακτίνα γράφεται κύκλος
- (4) Όλες οι ορθές γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους
- (5) Από σημείο A και ευθεία (ε) αχεται το πολύ μία ευθεία παράλληλη προς την (ε). (Αξίωμα της παραλληλίας)

D. Hilbert (1899)

αξιώματα / αξιώματα / αξιώματα / αξιώματα / αξιώματα
θεσης / διατάξης / συνεκτικότητας / ισοτιμίας / παραλληλίας

➔ Αξιώματα θέσης: αναφέρεται σε σχετική θέση σημείων / ευθειών. Προϋποθέτουν την ύπαρξη συνόλου σημείων των ευθειών.

81 Για δύο διαφορετικά σημεία A, B υπάρχει μοναδική ευθεία που τα περιέχει.

82 Κάθε ευθεία περιέχει τουλάχιστον 2 σημεία

83 Υπάρχουν (παισιεύεται) τουλάχιστον 3 μη-συνευθειακά σημεία

Πρόταση Δύο διαφορετικές ευθείες έχουν το πολύ ένα κοινό σημείο.

• αν $e_1 \parallel e_2 \Rightarrow$ κανένα κοινό

• αν $e_1 \neq e_2$ ($e_1 \nparallel e_2$) $\forall e_1, e_2 \in \{e_1, e_2\}$ όπου το θ_1

- θ4]** Για τρία υπ-ευνευθεμένα επίπεδα υπάρχει επίπεδο που τα περιέχει. Κάθε επίπεδο περιέχει ταλαχιστόν ένα επίπεδο (μοναδικό).
- θ5]** Από δύο διαφορετικά επίπεδα που ανήκουν σε επίπεδο και η ευθεία που τα περιέχει ανήκει στο επίπεδο.
- θ6]** Αν δύο επίπεδα π_1, π_2 έχουν κοινό σημείο A (εσωτερικό), τότε περιέχουν ταλαχιστόν ένα ακόμη επίπεδο.
- θ7]** Υπάρχουν ταλαχιστόν τέσσερα επίπεδα που δεν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο.

Π.χ. Μπορούμε υλοποίησης των $\theta_1, \theta_2, \theta_3$
 2 σημεία: $\{A, B, \Gamma\}$, ευθείες $\{A, B\}, \{B, \Gamma\}, \{A, \Gamma\}$
 Προφανώς πληρύνεται το θ_1
 - " - - " - το θ_2
 - " - - " - το θ_3 $\Rightarrow$ Άρα ικανοποιούνται όλα τα αξιώματα θεώρητα του Hilbert.

Ισοδύναμος έλεγχος για να είναι ένα σύστημα αξιωμάτων ανεξαρτητό

Π.χ. Ευρεθεί υποσύνολο που υλοποιούν
 2 σημεία: $\{A, B, \Gamma, \Delta, \epsilon\}$ ευθείες $\{A, B\}, \{A, \Gamma\}, \{A, \Delta\}, \{A, \epsilon\}$
 Ικανοποιούνται $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ και όχι το (Π) (*)
 - " - θ_1, θ_2, Π - " - το θ_3 (**)
 - " - θ_1, θ_3, Π - " - το θ_2 (***)
 - " - θ_2, θ_3, Π - " - το θ_1 (***)

*) $\{A, B\} \cap \{A, \Gamma\}$
 $\{A, \Gamma\} \cap \{A, \Delta\}$ δεν ικανοποιείται το (Π) αφού βρέθηκε 2 παράλληλες.

(**) 2 σημεία: $\{A, B\}$ ευθείες $\{A, B\}$ δεν ικανοποιείται το θ_3 , γιατί δεν υπάρχουν 3 υπ-ευνευθεμένα επίπεδα.

(***) 2 σημεία: $\{A, B, \Gamma\}$ ευθείες $\{A, B\}, \{B, \Gamma\}, \{A, \Gamma\}, \{A, \Delta\}$
 Δεν ικανοποιείται το θ_2 αφού η $\{A, \Delta\}$ έχει ένα σημείο.

(****) 2 σημεία: $\{A, B, \Gamma\}$, ευθείες: $\emptyset$ δεν υπάρχουν ευθείες για έλεγχο. Άρα το επαληθεύεται και το θ_1 δεν ικανοποιείται.

• Μοτίβο $\mathbb{R}^2$: 2 ηχηία (x, y) διατ. $\mathbb{R}$ οχη. $x, y \in \mathbb{R}$.

ευθείες: $\{(x, y) : ax + by + \gamma = 0 \text{ οχη } (a, b) \neq (0, 0)\}$

Θ2 : Έστω τυχαία $(\epsilon) : ax + by + \gamma = 0, (a, b) \neq (0, 0)$

χωρίς βλάβη γεω. (x, y) έστω $b \neq 0 \Rightarrow$ το $(0, -\frac{\gamma}{b})$ ανήκει στην (ϵ)
(είλω άλλο ένα σηείο)

αν $a \neq 0, x = a, (a, -\frac{a^2 + \gamma}{b})$

αν $a = 0$, έχω ελευθερία στην επιλογή του $x, x \neq 0$.

Θ3 : Έστω $(0, 0), (0, 1), (1, 0) \in \mathbb{R}^2$

$\downarrow \in \epsilon$
 $\gamma = 0, b + \gamma = 0, a + \gamma = 0 \Rightarrow a = b = \gamma = 0$ Αδύνατο. Άρα $\exists$ 3 μη-συμμετρήσιμα σηεία.

Θ1 : Έστω $P_1(x_1, y_1) \neq P_2(x_2, y_2)$ Θδο υπάρχει ευθεία που τα περιέχει και ότι είναι μοναδική.

• Υπαρξη : Θεωρώ την ευθεία $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = 0 \dots = 0 (y_2 - y_1)x + (x_2 - x_1)y + (x_1 y_2 - y_1 x_2) = 0$ ⁽¹⁾
 $\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 $a \quad b \quad \gamma$
 $(a, b) \neq (0, 0)$

Παρατηρώμε ότι υπάρχει η (1)

Μοναδικότητα : Έστω : $(\epsilon) : ax + by + \gamma = 0, (a, b) \neq (0, 0)$ $P_1, P_2 \in$ στις ευθείες
 $(2) : (a'x + b'y + \gamma' = 0, (a', b') \neq (0, 0))$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}, \quad A|B = \begin{pmatrix} a & b & -\gamma \\ a' & b' & -\gamma' \end{pmatrix}$$

(το (2) έχει λύση αν : $r(A) = r(A|B)$.)

(το (2) όχι μοναδική λύση σημαίνει $r(A) = r(A|B) < 2 \Rightarrow$ αριθμός αγνώστων)

$$\Rightarrow r(A) = r(A|B) = 1$$

$(a, b, \gamma), (a', b', \gamma')$ είναι Γ.Ε.